第 2 节 椭圆的焦点三角形相关问题（★★★）

内容提要

椭圆上一点与两焦点形成的三角形称为焦点三角形，焦点三角形问题常用椭圆的定义求解，但除定义外，可能还需结合图形（如等腰、等边、直角三角形，矩形，平行四边形等）的几何性质才能求解问题，因此本节将归纳高考中椭圆常见的图形和几何条件的处理思路.

典型例题

类型Ⅰ：焦点三角形中的特殊图形

【例 1】已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为椭圆 C 上一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $|PF_1|=2|PF_2|$，则椭圆 C 的离心率为_____.

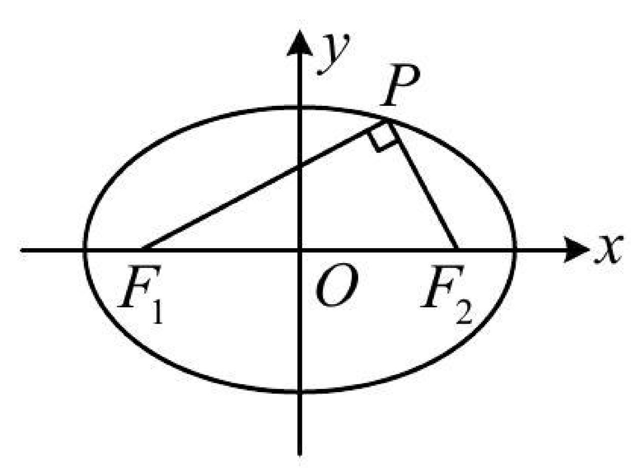
解析： 条件中有 $|PF_1|=2|PF_2|$，可结合椭圆定义求出它们，由椭圆定义，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

结合 $|PF_1|=2|PF_2|$ 可得 $|PF_1|=\dfrac{4a}{3}$，$|PF_2|=\dfrac{2a}{3}$，怎样翻译 $PF_1\perp PF_2$？有长度，考虑勾股定理，

如图，因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}=\dfrac{2\sqrt{5}a}{3}$，

又 $|F_1F_2|=2c$，所以 $\dfrac{2\sqrt{5}a}{3}=2c$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

答案： $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$



【反思】解析几何小题中对直角的常见翻译方法有：①勾股定理；②斜率之积为 -1；③向量数量积等于 0；④斜边上的中线等于斜边的一半等. 选择合适的方法前应先预判计算量.

【变式】设 F_1，F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，P 为椭圆上一点，ΔPF_1F_2 为直角三角形，且 $|PF_1|>|PF_2|$，则 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}$ 的值为_____.

解析： 焦点三角形问题优先考虑结合椭圆的定义求解，先给出椭圆的 a，b，c，

由题意，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$，设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，$m>n$，则 $m+n=2a=6$ ①，

ΔPF_1F_2 是直角三角形，可用勾股定理翻译，但需讨论谁是直角顶点，有图 1 和图 2 两种情况，

若为图 1，则 $m^2+n^2=|F_1F_2|^2=4c^2=20$ ②，

联立①②结合 $m>n$ 可解得：$m=4$，$n=2$，

所以 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{m}{n}=2$；

若为图 2，则 $n^2+|F_1F_2|^2=m^2$，即 $n^2+20=m^2$ ③，

联立①③解得：$m=\dfrac{14}{3}$，$n=\dfrac{4}{3}$，故 $\dfrac{|PF_1|}{|PF_2|}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{7}{2}$.

答案：2 或 $\dfrac{7}{2}$

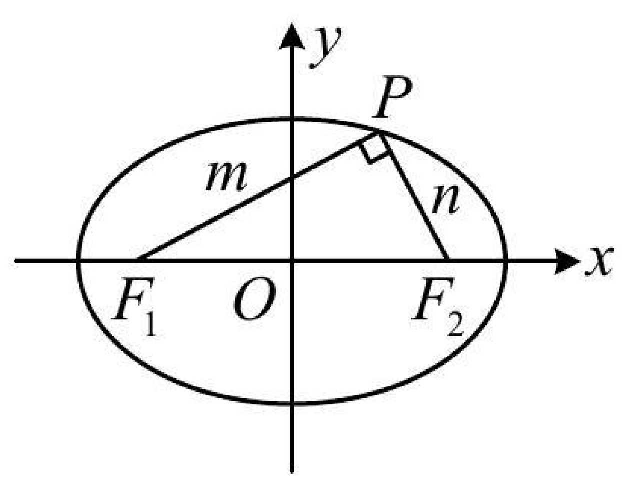


图1

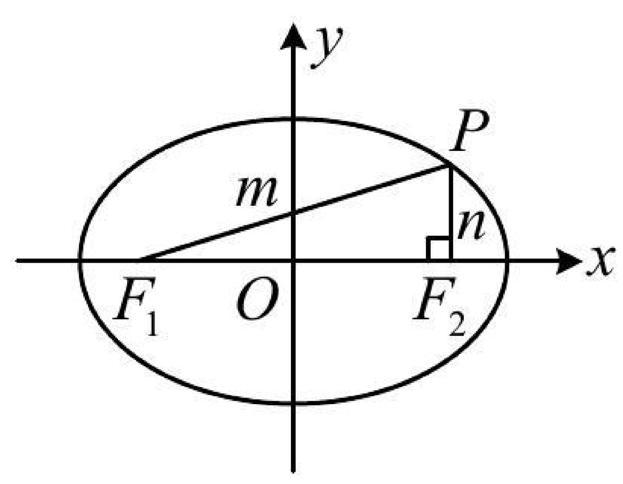


图2

【例 2】已知 F_1，F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，过原点的直线交椭圆 C 于 P,Q 两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，则四边形 PF_1QF_2 的面积为_____.

解析：要求四边形 PF_1QF_2 的面积，先分析它的形状，由题意，O 既是 PQ 中点，也是 F_1F_2 中点，

所以四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，又 $|PQ|=|F_1F_2|$，所以四边形 PF_1QF_2 是矩形，故 $PF_1\perp PF_2$，

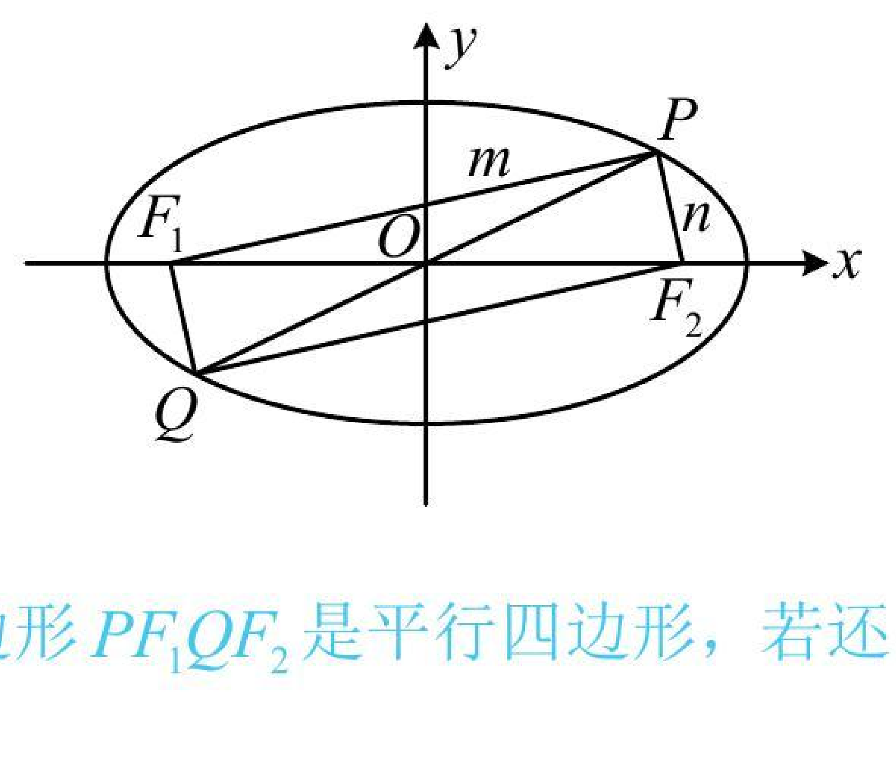
如图，四边形 PF_1QF_2 的面积即为 $|PF_1|\cdot|PF_2|$，可结合椭圆定义，并用勾股定理翻译 $PF_1\perp PF_2$ 来算，

由题意，$a=4$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}$，$|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$，

记 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $\begin{cases}m+n=2a=8 & ①\\ m^2+n^2=|F_1F_2|^2=48 & ②\end{cases}$，由②得：$(m+n)^2-2mn=48$ ③，

将①代入③可得：$64-2mn=48$，所以 $mn=8$，故 $S_{PF_1QF_2}=mn=8$.

答案：8



【反思】当题目出现过原点的直线与椭圆交于 P，Q 两点时，就隐含了四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，若还满足对角线长度相等或某个顶角为 90°，则为矩形.

类型 II：定义与中点相关

【例 3】已知椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F_1，P 是椭圆上异于顶点的任意一点，O 为坐标原点，若 D 是线

段 PF_1 的中点，则 ΔF_1OD 的周长为_____.

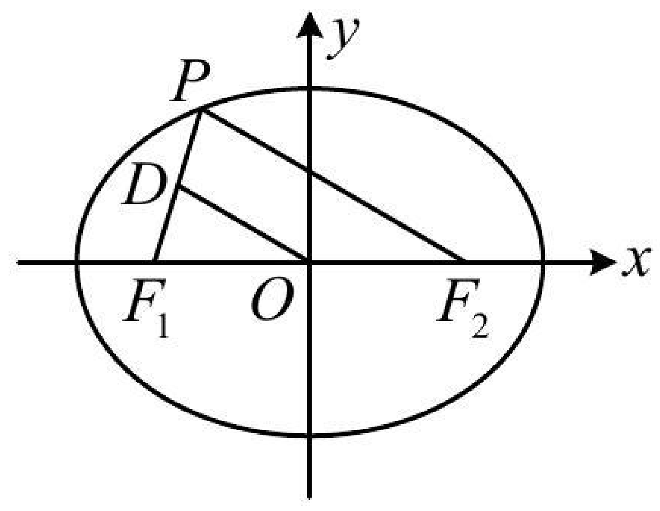
解析： 如图，有中点条件，想到中位线，设椭圆的右焦点为 F_2，因为 D 为 PF_1 的中点，O 为 F_1F_2 的中点，

所以 $|OD|=\frac{1}{2}|PF_2|$，$|DF_1|=\frac{1}{2}|PF_1|$，$|OF_1|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，

故 ΔF_1OD 的周长 $L=|OD|+|DF_1|+|OF_1|=\frac{1}{2}(|PF_2|+|PF_1|+|F_1F_2|)=\frac{1}{2}(2a+2c)=a+c$ ①，

由所给椭圆方程可得 $a=3$，$c=\sqrt{9-5}=2$，代入①得：$L=5$.

答案： 5



【反思】若条件出现中点，可考虑应用中位线的性质. 注意，椭圆有隐藏中点：O 为 F_1F_2 的中点.

【变式 1】已知椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，若线段 PF_2 的中点 Q 在 y 轴上，则 $|PF_1|:|PF_2|=$（　　）

（A）3:5　　（B）3:4　　（C）5:3　　（D）4:3

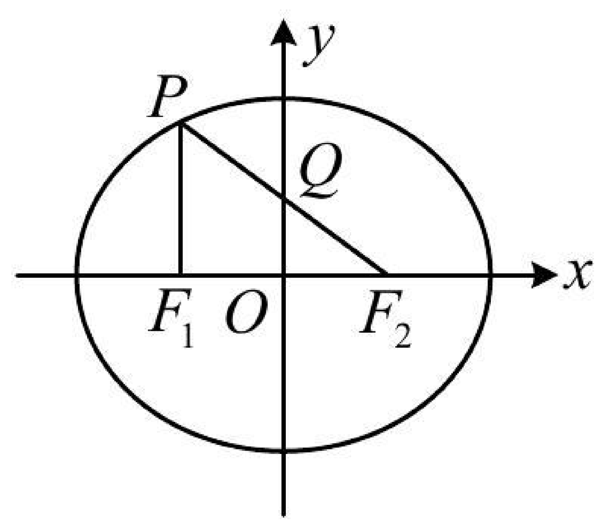
解析： 条件涉及中点，先看看有没有中位线，如图，PF_2 的中点 Q 在 y 轴上，O 为 F_1F_2 的中点，

所以 $OQ // PF_1$，因为 $OQ\perp x$ 轴，所以 $PF_1\perp x$，

我们发现 $|PF_1|$ 是半通径长，可代公式计算，$|PF_2|$ 可由椭圆定义来算，

$|PF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{12}{4}=3$，又 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$，所以 $|PF_2|=8-|PF_1|=5$，故 $|PF_1|:|PF_2|=3:5$.

答案： A



【变式 2】（2019・浙江卷）已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左焦点为 F，点 P 在椭圆上且在 x 轴的上方，若线段 PF 的中点在以原点 O 为圆心，$|OF|$ 为半径的圆上，则直线 PF 的斜率是_____.

解析： 如图，涉及中点，可尝试构造中位线，由题意，$a=3$，$c=2$，

记右焦点为 F_1，PF 中点为 Q，因为 O 是 FF_1 的中点，所以 $|PF_1|=2|OQ|=4$，

有了$|PF_1|$，就能求$|PF|$，于是ΔPFF_1已知三边，可用余弦定理推论求$\cos\angle PFF_1$，再求$\tan\angle PFF_1$，

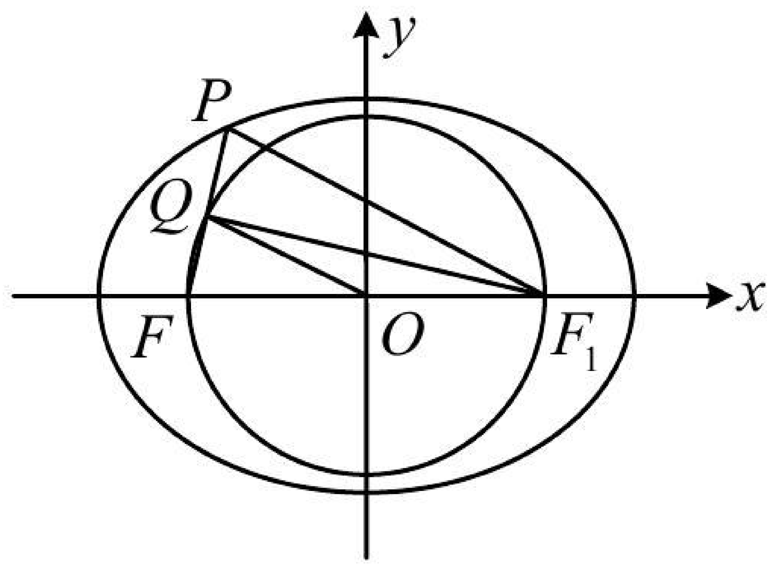
$|PF|+|PF_1|=2a\Rightarrow|PF|=2a-|PF_1|=6-4=2$，

又$|FF_1|=2c=4$，所以$\cos\angle PFF_1=\dfrac{|PF|^2+|FF_1|^2-|PF_1|^2}{2|PF|\cdot|FF_1|}=\dfrac{4+16-16}{2\times2\times4}=\dfrac{1}{4}$，

从而$\sin\angle PFF_1=\sqrt{1-\cos^2\angle PFF_1}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

故$\tan\angle PFF_1=\dfrac{\sin\angle PFF_1}{\cos\angle PFF_1}=\sqrt{15}$，所以直线$PF$的斜率为$\sqrt{15}$.

答案：$\sqrt{15}$



类型III：定义与解三角形相关

【例 4】已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为$C$上的一点，且$\angle F_1PF_2=60^\circ$，

$|PF_1|=3|PF_2|$，则椭圆C的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{13}}{4}$　　（D）$\dfrac{3}{4}$

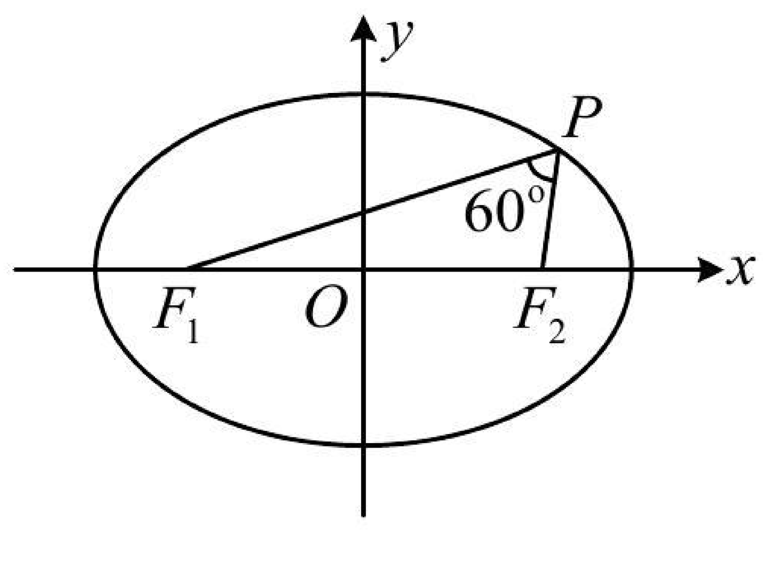
解析：看到$|PF_1|$和$|PF_2|$，想到椭圆定义，由题意，$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a\\|PF_1|=3|PF_2|\end{cases}$，所以$|PF_1|=\dfrac{3a}{2}$，$|PF_2|=\dfrac{a}{2}$，

题干还给了$\angle F_1PF_2$，可在ΔPF_1F_2中用余弦定理建立方程求离心率，

如图，由余弦定理，$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，

所以$4c^2=\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}-2\times\dfrac{3a}{2}\times\dfrac{a}{2}\times\cos60^\circ$，整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{7}{16}$，故离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

答案：B



【变式】已知F_1，F_2为椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，椭圆的离心率为$\dfrac{1}{2}$，$M$为椭圆上的一动

点，则 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{3}$　　（B）$\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$\dfrac{2\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{3\pi}{4}$

解析： 已知离心率，可找到 a，b，c 的比值关系，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2c$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，

要求 $\angle F_1MF_2$ 的最大值，只需求 $\cos\angle F_1MF_2$ 的最小值，可在 ΔMF_1F_2 中用余弦定理推论来算，

设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，则 $m+n=2a$ ①，

又 $|F_1F_2|=2c$，所以 $\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|}=\dfrac{m^2+n^2-4c^2}{2mn}$，结合式①知接下来应对分子配方，

故 $\cos\angle F_1MF_2=\dfrac{(m+n)^2-2mn-4c^2}{2mn}=\dfrac{4a^2-2mn-4c^2}{2mn}=\dfrac{2b^2-mn}{mn}=\dfrac{2b^2}{mn}-1$

$\geq\dfrac{2b^2}{(\frac{m+n}{2})^2}-1=\dfrac{2b^2}{a^2}-1=\dfrac{2\times3c^2}{4c^2}-1=\dfrac{1}{2}$，

当且仅当 $m=n$ 时取等号，此时如图 2，

所以 $(\cos\angle F_1MF_2)_{\min}=\dfrac{1}{2}$，

又 $\angle F_1MF_2\in[0,\pi)$，所以 $\angle F_1MF_2$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{3}$.

答案： A

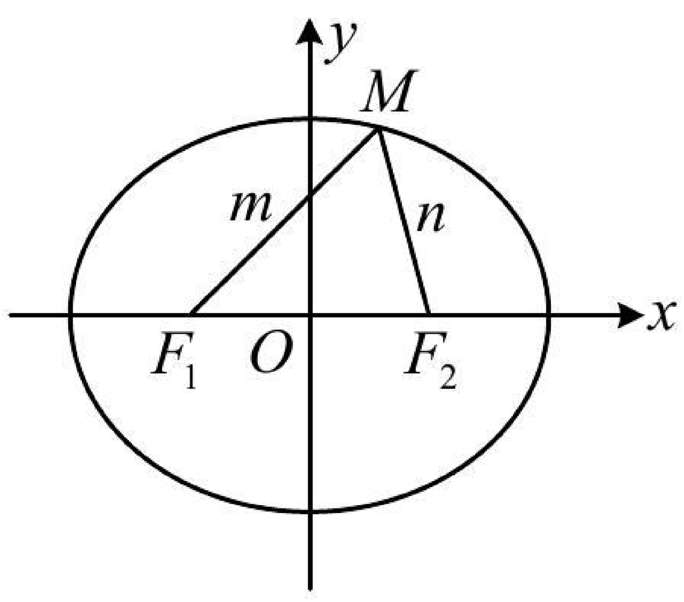


图1

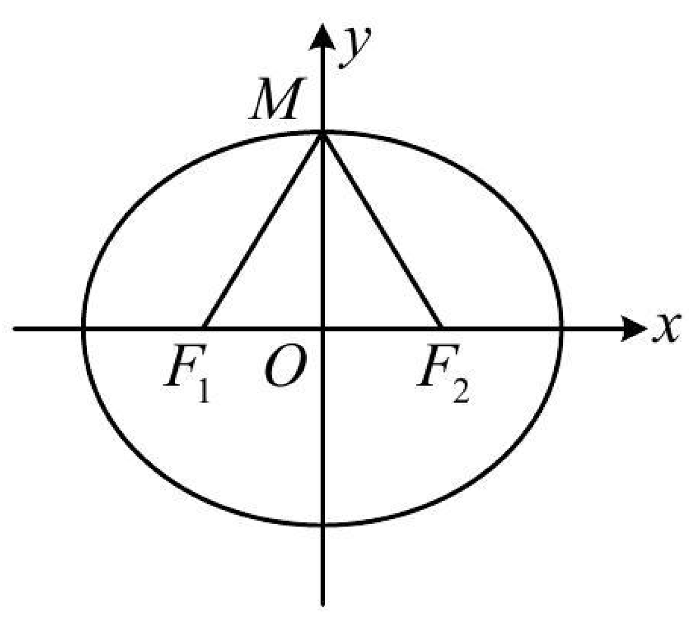


图2

【总结】 ①椭圆中涉及角度，常用余弦定理处理；②最大张角结论：当 M 在椭圆上运动时，$\angle F_1MF_2$ 的最大值必定在短轴端点处取得，如变式图 2.

类型Ⅳ：定义与综合几何性质

【例 6】（2019 • 新课标 I 卷）已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为（　　）

（A）$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　（B）$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　（C）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　（D）$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

解析： A，B 都在椭圆上，先利用椭圆的定义和已知的线段长度关系来研究有关线段的长，

设椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设 $|BF_2|=m$，则 $|AF_2|=2m$，$|BF_1|=|AB|=3m$，

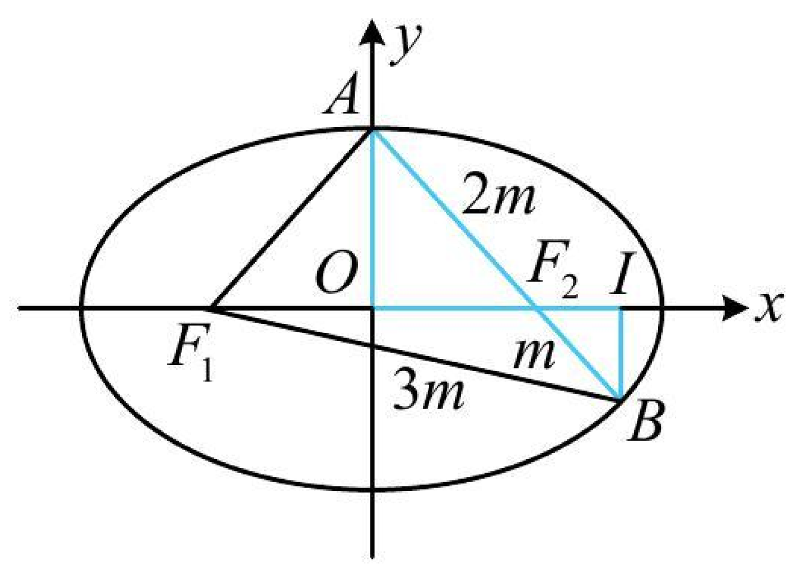
$|BF_1|+|BF_2|=4m=2a\Rightarrow m=\dfrac{a}{2}\Rightarrow|AF_2|=a$，故 A 为短轴端点，到此可写出 A 的坐标，而对于 $|AF_2|=2|F_2B|$ 这种条件，常通过构造相似三角形，将斜边之比转化为直角边之比，进而写出点 B 的坐标，

如图，$A(0,b)$，$F_2(1,0)$，作 $BI\perp x$ 轴于点 I，则 $\Delta AOF_2\backsim\Delta BIF_2$，所以 $\dfrac{|F_2I|}{|OF_2|}=\dfrac{|BI|}{|OA|}=\dfrac{|BF_2|}{|AF_2|}=\dfrac{1}{2}$，

从而 $|F_2I|=\dfrac{1}{2}|OF_2|=\dfrac{1}{2}$，$|OI|=|OF_2|+|F_2I|=\dfrac{3}{2}$，$|BI|=\dfrac{1}{2}|OA|=\dfrac{b}{2}$，故 $B(\dfrac{3}{2},-\dfrac{b}{2})$，

代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 解得：$a^2=3$，故 $b^2=a^2-1=2$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.

答案：B



【反思】当解析几何中出现共线线段比例式的时候，可以考虑利用相似化斜边比例为直角边比例.

【例 7】若 P 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点，F_1，F_2 是椭圆的两个焦点，且 ΔPF_1F_2 的内切圆半径为 1，当 P 在第一象限时，点 P 的纵坐标为_____.

解析：由题意，$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=3$，

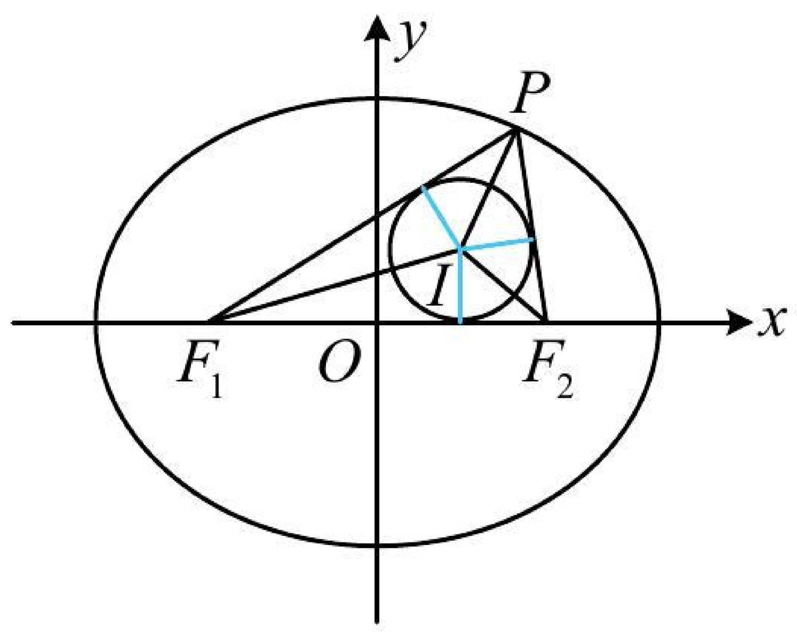
对于 ΔPF_1F_2，已知内切圆半径 r，可联想到用公式 $S=\dfrac{1}{2}Lr$（证明过程见本题反思）求其面积，

ΔPF_1F_2 的周长 $L=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}Lr=\dfrac{1}{2}\times16\times1=8$ ①，

我们也可用点 P 的纵坐标和 $|F_1F_2|$ 来算 ΔPF_1F_2 的面积，从而建立方程求解点 P 的纵坐标，

另一方面，$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P=\dfrac{1}{2}\times6\times y_P=3y_P$，结合式①可得 $3y_P=8$，故 $y_P=\dfrac{8}{3}$.

答案：$\dfrac{8}{3}$



【反思】解析几何中涉及内切圆，常见的思考方向有：①用公式 $S=\dfrac{1}{2}Lr$ 进行面积与半径的转化，此公式

的推导如图 1，$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta IAB}+S_{\Delta IAC}+S_{\Delta IBC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot r+\frac{1}{2}|AC|\cdot r+\frac{1}{2}|BC|\cdot r=\frac{1}{2}(|AB|+|AC|+|BC|)r=\frac{1}{2}Lr$；②切线长对应相等，如图 1 中 $|AM|=|AN|$；③用角平分线性质定理，如图 2，由 BI 和 CI 分别为 $\angle KBA$ 和 $\angle KCA$ 的平分线知 $\frac{|AI|}{|IK|}=\frac{|AB|}{|BK|}=\frac{|AC|}{|CK|}$.

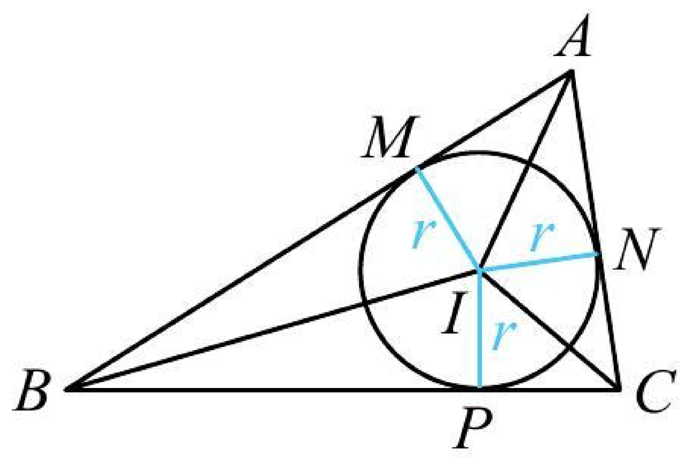


图1

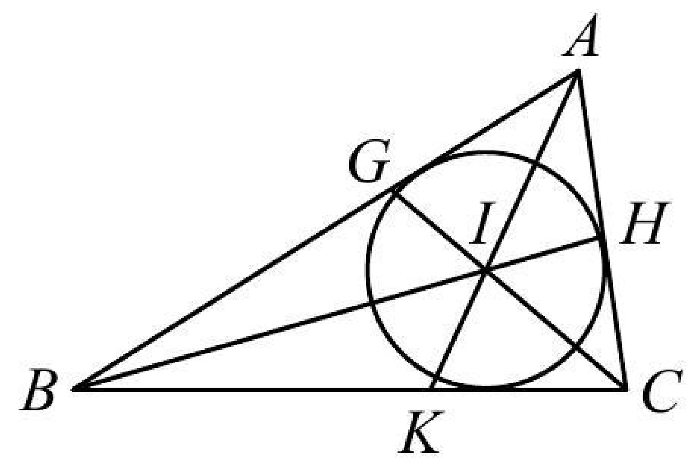


图2

强化训练

1.（★）已知F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左、右焦点，$P$是椭圆$C$上一点，若$|PF_1|=2$，且$PF_1\perp PF_2$，则$a=$_____.

2.（2022•内蒙古包头模拟•★★）已知$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$是椭圆E的两个焦点，P是E上一点，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，且$S_{\Delta PF_1F_2}=c^2$，则椭圆$E$的离心率为（　　）

（A）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　（B）$\frac{\sqrt{6}}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

3．（2023 • 全国模拟 • ★★）设F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的左、右焦点，点$P$在椭圆上，若线段$PF_1$的中点$M$在$y$轴上，则$\frac{|PF_2|}{|PF_1|}$的值为（　　）

（A）$\frac{5}{13}$　（B）$\frac{4}{5}$　（C）$\frac{2}{7}$　（D）$\frac{4}{9}$

4.（2022 • 江西模拟 • ★★★）设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 M，N 在 C 上，且 M，N 关于原点 O 对称，若 $|MN|=|F_1F_2|$，$|NF_2|=3|MF_2|$，则椭圆 C 的离心率为_____.

5.（2022 • 福建质检 • ★★★）已知点 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线交椭圆于 A，B 两点，且 $AF_1\perp AB$，$\frac{|AF_1|}{|AB|}=\frac{4}{3}$，则该椭圆的离心率是（　　）

（A）$\frac{2}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{5}}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{6}}{3}$

6.（2023 •山西模拟 •★★）已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上一点，若 $|PF_1|=|F_1F_2|$，$\cos\angle PF_2F_1=\frac{1}{4}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$\frac{2}{3}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{3}$

7.（2022 • 广西南宁模拟 • ★★★）已知 F 是椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，过原点的直线 l 与椭圆 E 相交于 P，Q 两点，若 $|PF|=5|QF|$，且 $\angle PFQ=120^{\circ}$，则椭圆的离心率为（　　）

（A）$\frac{\sqrt{7}}{6}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{21}}{6}$　（D）$\frac{\sqrt{21}}{5}$

8．（2014·安徽卷·★★★）若F_1，F_2分别是椭圆$E:x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$的左、右焦点，过点$F_1$的直线交椭圆$E$于$A$，$B$两点，若$|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$轴，则椭圆$E$的方程为______.

9．（2022·湖南长沙模拟·★★★）已知F_1，F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，点$A(0,b)$，点$B$在椭圆$C$上，且$\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，$D$，$E$分别是$AF_2$，$BF_2$的中点，且$\Delta DEF_2$的周长为4，则椭圆$C$的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　（B）$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{8}=1$　（C）$\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$　（D）$x^2+\frac{3y^2}{2}=1$

10．（2022·江西萍乡三模·★★★）设F_1，F_2是椭圆$C:y^2+\frac{x^2}{t}=1(0<t<1)$的焦点，若椭圆$C$上存在点$P$，满足$\angle F_1PF_2=120^\circ$，则$t$的取值范围是（　　）

（A）$(0,\frac{1}{4}]$　（B）$[\frac{1}{4},1)$　（C）$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　（D）$[\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

11．（2022·山东模拟·★★★）已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$P$在椭圆上且在$x$轴的下方，若线段$PF_2$的中点$T$在以$F_1F_2$为直径的圆上，则直线$PF_2$的倾斜角为（　　）

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{3}$　（D）$\frac{2\pi}{3}$